Олимпиада
школьников по математике
«ТИИМ-2024»
Заключительный тур
11 февраля 2024 года
9 класс (Европа)

▷ **1.** При подготовке к экзамену три школьника решали 150 задач. Каждый решил 80 из них, каждую задачу кто-нибудь решил. Задача называется трудной, если её решил только один школьник, и лёгкой, если её решили все три школьника. Каких задач больше — лёгких или трудных? На сколько?

Решение:
Математической моделью задачи являются круги Эйлера. Обозначим через a_i количество задач, решённых только j-м учеником, через a_{ij} - количество задач, решённых только i-м и j-м учениками, через a_{123} — количество задач, решённых всеми учениками. Тогда количество трудных задач — $a_1+a_2+a_3$, лёгких — a_{123}. Нас интересует величина $s=a_1+a_2+a_3-a_{123}$. Согласно условию, имеем систему: $\begin{cases} a_1+a_2+a_3+a_{12}+a_{13}+a_{23}+a_{123}=150 \\ a_1+a_{12}+a_{13}+a_{123}=80 \\ a_2+a_{23}+a_{23}+a_{123}=80 \\ a_3+a_{13}+a_{23}+a_{123}=80. \end{cases}$
Сложив почленно три последние равенства системы и отняв удвоенное первое, найдём $-a_1-a_2-a_3+a_{123}=240-300=-60$, откуда $s=60$. Полученный результат означает, что трудных задач больше, и больше на 60.
Ответ: 60.

▷ **2.** Дан отрезок $\sqrt{5}$. С помощью линейки и циркуля постройте отрезок $\sqrt[4]{5}$.

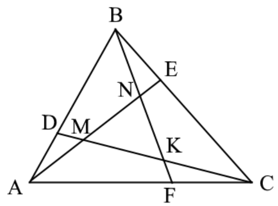
Решение: С помощью циркуля и линейки можно из отрезков a и b построить отрезки $\sqrt{a^2+b^2}$ и $\sqrt{ab}$, а также разделить отрезок на заданное число частей. Прямоугольный треугольник с катетами $\sqrt{5}$ и $2\sqrt{5}$ имеет гипотенузу 5. Делим отрезок 5 на 5 равных частей, получается единичный отрезок. Теперь строим отрезок $\sqrt[4]{5}=\sqrt{1\cdot\sqrt{5}}$, как среднее геометрическое двух отрезков 1 и $\sqrt{5}$.

▷ **3.** Пусть $\overline{a_1a_2\ldots a_k}$ - десятичная запись k-значного числа. Найдите все шестизначные числа, для которых выполняется соотношение
$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}=\overline{a_1a_2a_3}\cdot\overline{a_4a_5a_6}+2024$.

Решение:
$\overline{a_1a_2a_3}=x\in[100;999], \overline{a_4a_5a_6}=y\in[100;999]$
$1000x+y=x\cdot y+2024$
$(x-1)y-1000(x-1)+1024=0$
$(x-1)(1000-y)=1024=2^{10}$
$\begin{cases} x-1=128 \\ 1000-y=8 \end{cases}$ $\begin{cases} x=129 \\ y=992 \end{cases}$
$\begin{cases} x-1=256 \\ 1000-y=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x=257 \\ y=996 \end{cases}$
$\begin{cases} x-1=512 \\ 1000-y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=513 \\ y=998 \end{cases}$
$129992-129\cdot 992=2024$
$257996-257\cdot 996=2024$
$513998-513\cdot 998=2024$
Ответ: $(129992, 257996, 513998)$

▷ **4.** Площадь треугольника ABC равна S. Точки D, F, E расположены на сторонах AB, AC, BC так, что $AD=\frac{1}{3}AB$, $BE=\frac{1}{3}BC$, $CF=\frac{1}{3}AC$. На пересечении прямых AE, CD, BF образовался треугольник. Найдите его площадь.

Решение: $\overline{AM}=\overline{AC}+\overline{CM}=\overline{AC}+x\cdot\overline{CD}=\overline{AC}+x\cdot\left(\overline{CA}+\frac{1}{3}\overline{AB}\right)=(1-x)\overline{AC}+\frac{x}{3}\overline{AB}$
$\overline{AE}=\overline{AB}+\overline{BE}=\overline{AB}+\frac{1}{3}\overline{BC}=\overline{AB}+\frac{1}{3}\left(\overline{AC}-\overline{AB}\right)=\frac{2}{3}\overline{AB}+\frac{1}{3}\overline{AC}$
Векторы $\overline{AM}$ и $\overline{AE}$ коллинеарные, поэтому $\frac{1-x}{\frac{1}{3}}=\frac{\frac{x}{3}}{\frac{2}{3}}$, откуда $x=\frac{6}{7}$ и $\overline{CM}=\frac{6}{7}\overline{CD}$.
$\frac{S_{AMC}}{S_{ADC}}=\frac{CM}{CD}=\frac{6}{7}$; $\frac{S_{ADC}}{S_{ABC}}=\frac{AD}{AB}=\frac{1}{3}$.
Поэтому $S_{AMC}=\frac{2}{7}S_{ABC}$. Аналогично $S_{ANB}=S_{BKC}=\frac{2}{7}S_{ABC}$.
Значит, $S_{MNK}=S_{ABC}-(S_{AMC}+S_{ANB}+S_{BKC})=\frac{1}{7}S_{ABC}$.



▷ **5.** Можно ли натуральное число N представить в виде суммы квадратов трех натуральных чисел
а) $N=7\cdot 2^{2024}$,
б) $N=7\cdot 2^{2025}$?

Решение: Возможно только при всех нечетных натуральных m $N=7\cdot 2^m$.
Пусть $7\cdot 2^m=a^2+b^2+c^2$

Так как число в левой части этого равенства четное, то четным должно быть и число в правой части. Это возможно только в двух случаях:
1) среди чисел a, b, c два нечетных и одно четное, либо
2) все три числа четные.
Покажем, что в случае 1) равенство возможно только при $m = 1$. Пусть, без нарушения общности, числа a и b нечетны, а число c четно, т.е. $a = 2k - 1$, $b = 2l - 1$ и $c = 2n$. Тогда равенство
$N = 7 \cdot 2^m = 4(k^2 + l^2 - k - l + n^2) + 2$
Это равенство, если $m > 1$, невозможно, поскольку, левая часть делится на 4, а правая нет. рассмотрим случай 2). Пусть 2^q - наибольшая степень двойки, на которую делится каждое из чисел a, b и c, т.е. $a = 2^q a_1, b = 2^q b_1, c = 2^q c_1$, где среди чисел a_1, b_1, c_1 хотя бы одно нечетно.
Тогда равенство принимает вид $7 \cdot^{m-2q} = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2$ Если $m - 2q \geqslant 2$, то, поскольку среди чисел a_1, b_1, c_1 хотя бы одно нечетное, а тогда нечетных среди них ровно два, такое же рассуждение, как и выше, показывает, что равенство невозможно.
Поэтому равенство может выполняться только либо при $m - 2q = 0$, либо $m - 2q = 1$. Если $m - 2q = 0$, то равенство принимает вид $7 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2$ и простой перебор показывает что это невозможно.
Если $m - 2q = 1$, то равенство принимает вид $14 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2$ и его решения найдены выше: например, $a_1 = 3, b_1 = 2, c_1 = 1$. Таким образом, представление $7 \cdot 2^m = a^2 + b^2 + c^2$ имеет место только при нечетных m.

▷ **6.** Номера каких годов XX века могут быть представлены в виде $2^n - 2^k$, где n и k - натуральные числа?

Решение: Следует подобрать такие натуральные числа n и k, чтобы выполнялось неравенство

$$1900 < 2^n - 2^k \leqslant 2000$$

Так как $2^{10} < 1900$, то $n \geqslant 11$; при $n \geqslant 12$ $2^n \geqslant 4096$, а тогда при любых n и k $(n > k)$ $2^n - 2^k > 2000$, так что $n = 11$. Подобрать возможные значения k уже не представляет труда, и мы получаем два номера года, удовлетворяющих условию задачи:
$1920 = 2^{11} - 2^7$ и $1984 = 2^{11} - 2^6$.

▷ **7.** В некотором государстве сложение и вычитание обозначается знаками "!" и "?", но вам неизвестно, какой знак какой операции соответствует. Каждая операция применяется к двум числам, но при вычитании вам неизвестно, вычитается левое число из правого или правое из левого. К примеру, выражение $a?b$ обозначает одно из следующих: $a - b$, $b - a$ или $a + b$. Вам неизвестно, как записываются числа в этом государстве, но переменные a, b и скобки есть и используются как обычно. Объясните, как с помощью них и знаков "!", "?" записать выражение, которое гарантированно равно $25a - 20b$.

Решение:
Заметим что, выражение $(a?a)!(a?a)$ всегда равно нулю. В дальнейшем мы можем использовать 0, подразумевая, что вместо него должно быть записано именно это выражение. Выражение $(x?0)?(0?y)$ всегда равно $x+y$. Аналогично, теперь мы можем использовать операцию $+$ с двумя аргументами. Выражение $0?((0!(x!0))?0)$ всегда равно $-x$.
Теперь легко выписать искомое выражение
$((\ldots(\underbrace{a + a) + \ldots +}_{+24} a) + (-((\ldots(\underbrace{b + b) + \ldots +}_{+19} b))$.

▷ **8.** Последовательность начинается числами 2 и 3. Каждый следующий член последовательности определяется, как последняя цифра произведения двух предыдущих. Какое число стоит на 2024 месте?

Решение: Выпишем несколько первых членов последовательности

$$2, 3, \underbrace{6, 8, 8, 4, 2, 8}_{\textit{период}}, 6, 8, \ldots$$

Поскольку в последовательности встретились две цифры 6 и 8, которые были записаны прежде, то дальше цифры будут периодически повторяться.
Длина периода составляет шесть цифр. Делим 2024 - 2 на 6, получается в остатке 0. Отсчитываем шестую цифру в периоде - это 8.
Ответ: 8.

▷ **9.** Решить уравнение $\{\frac{15x-4}{6}\} = \frac{5x-3}{5}$, где $\{a\} = a - [a]$ — дробная часть числа a.

Решение: Преобразуем уравнение так, чтобы оно содержало антье:
$\frac{15x-4}{6} - \left[\frac{15x-4}{6}\right] = \frac{5x-3}{5}$
$\left[\frac{15x-4}{6}\right] = \frac{45x-2}{30}$
Теперь произведём замену $y = \frac{45x-2}{30}$ и выразим x через y :
$x = \frac{30y+2}{45}$.
Подставим x в последнее уравнение:
$\left[\frac{30y-10}{18}\right] = y$
$\left[\frac{15y-5}{9}\right] = y$
$0 \leqslant \frac{15-5}{9} - y < 1$
$0 \leqslant 6y - 5 < 9$
$0 < \frac{5}{6} \leqslant y < \frac{14}{6} < 3$
Так как y — целое число, то y может быть равно только 1 или 2.
Следовательно, x будет равно $\frac{32}{45}$ или $\frac{62}{45}$ соответственно.

▷ **10.** Найдите хотя бы одну тройку попарно различных натуральных чисел m, n, k таких, что $m^3 + n^3 + k^3 = 1679616$.

Решение:
$S(1679616) = 1 + 6 + 7 + 9 + 6 + 1 + 6 = 36$

$N \vdots 9$, $N \vdots 4 \Rightarrow N \vdots 36$
$N = 36 * 46656 = 36^2 * 1296 = 36^4$
$m^3 + n^3 + k^3 = 36^4$
$m = a * 36,\ n = b * 36,\ k = c * 36$
$a^3 + b^3 + c^3 = 36$
$a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.
Ответ: (36,72,108).